

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 5 - חקירת משוואה ממעלה שנייה

תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר ..... 1
2. חקירה של משוואה ממעלה שנייה ..... 2
3. חקירות עם קדקוד פרבולה ..... 11

## פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר:

### סיכום כללי:

משוואות מהצורה:  $ax^2 + bx + c = 0$  המכילות פרמטר כלשהו,  $m$ , המגולם בתוך הביטויים של המקדמים  $a$ ,  $b$  ו- $c$  נקראות משוואות עם פרמטר. פתרון של משוואה עם פרמטר יתבצע באופן רגיל, אך יכול להכיל את הפרמטר.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואה:  $x^2 + mx - 12m^2 = 0$ .

(2) פתור את המשוואה:  $2x^2 + 5m^2 = (11m + 1)x - 5m$ .

### תשובות סופיות:

(1)  $x_1 = 3m$ ,  $x_2 = -4m$

(2)  $x_1 = 5m$ ,  $x_2 = \frac{m+1}{2}$

## חקירה של משוואה ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

#### המשוואה הריבועית:

תהא המשוואה הריבועית:  $ax^2 + bx + c = 0$  כאשר  $a \neq 0$ .  
נגדיר:  $\Delta = b^2 - 4ac$  ונאמר כי:

- למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים אם:  $\Delta > 0$ .
- למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד אם:  $\Delta = 0$ .
- למשוואה לא יהיו שני פתרונות ממשיים כלל אם:  $\Delta < 0$ .

אם  $a = 0$  תתקבל משוואה ליניארית מהצורה:  $bx + c = 0$ .

- למשוואה זו יהיה פתרון ממשי אחד אם  $b \neq 0$ .
- למשוואה לא יהיו פתרונות כלל אם:  $b = 0$  ו-  $c \neq 0$ .

אם  $b = 0$  וגם  $c = 0$  למשוואה יהיו אינסוף פתרונות ממשיים.

#### הפונקציה הריבועית:

תהא הפונקציה הריבועית:  $y = ax^2 + bx + c$  כאשר  $a \neq 0$ .  
נגדיר:  $\Delta = b^2 - 4ac$  ונאמר כי לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$  באופן הבא:

- אם  $a > 0$  תתקבל פרבולה ישרה (מחייכת):
  - עבור  $\Delta > 0$  הפרבולה תחתוך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות שונות.
  - עבור  $\Delta = 0$  הפרבולה תשיק לציר ה- $x$  (חיתוך בנקודה אחת).
  - עבור  $\Delta < 0$  הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה- $x$  כלל).
- אם  $a < 0$  תתקבל פרבולה הפוכה (עצובה):
  - עבור  $\Delta > 0$  הפרבולה תחתוך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות שונות.
  - עבור  $\Delta = 0$  הפרבולה תשיק לציר ה- $x$  (חיתוך בנקודה אחת).
  - עבור  $\Delta < 0$  הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה- $x$  כלל).

- אם  $a=0$  תתקבל פונקציה ליניארית:  $y = bx + c$  ולה:

○ עבור  $b > 0$  יתקבל ישר עולה החותך את ציר ה- $x$  ב- $\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$ .

○ עבור  $b < 0$  יתקבל יורד עולה החותך את ציר ה- $x$  ב- $\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$ .

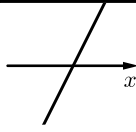
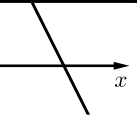
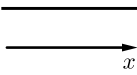
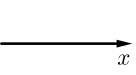
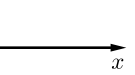
- אם  $b=0$  יתקבל ישר  $y=c$  וכעת:

○ אם  $c > 0$  הישר כולו מעל לציר ה- $x$  ומקביל לו.

○ אם  $c < 0$  הישר כולו מתחת לציר ה- $x$  ומקביל לו.

○ אם  $c=0$  הישר מתלכד עם ציר ה- $x$ .

ניתן לסכם את כל המקרים באופן הבא:

| פירוט מילולי                                                | תנאים                 | $\Delta > 0$                                                                        | $\Delta = 0$                                                                        | $\Delta < 0$                                                                        |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| תיאור גרפי של<br>$y = ax^2 + bx + c$<br>עבור $a \neq 0$     | $a > 0$               |  |  |  |
|                                                             | $a < 0$               |  |  |  |
| תיאור גרפי של<br>כאשר $y = bx + c$<br>$a = 0$ ו- $b \neq 0$ | $a = 0$<br>$b \neq 0$ |  |  |                                                                                     |
|                                                             |                       |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
| תיאור גרפי של<br>$y = c$<br>כאשר $a = 0$ ו- $b = 0$         | $a = 0$<br>$b = 0$    |  |  |  |
|                                                             |                       |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |

## שאלות:

(1) נתונה המשוואה:  $(3-m)x^2 + 4mx - 2m = 0$ ,  $(m \neq 3)$ .

מצא לאלו ערכי  $m$  למשוואה:

א. שני פתרונות ממשיים שונים.

ב. פתרון ממשי אחד.

ג. אין פתרונות ממשיים כלל.

(2) נתונה הפונקציה:  $y = 2mx^2 + mx - 1$ .

מצא לאלו ערכי  $m$  הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- $x$ .

(3) נתונה הפונקציה:  $y = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + 4$ ,  $(m \neq \pm 3)$ .

מצא לאלו ערכי  $m$  הפונקציה נמצאת מעל ציר ה- $x$  לכל ערך של  $x$ .

(4) נתון אי השוויון:  $mx^2 > (m + 4)(x - 1) - x^2$ .

מצא לאלו ערכי  $m$  אי השוויון מתקיים לכל ערך של  $x$ .

(5) נתונה המשוואה הבאה:  $-m(x-1)^2 + 2(m+16) = x(6-x(2m-3)) + 1$ .

א. מצא עבור אלו ערכי  $m$  יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה- $m$  המתאימים במידה והוא קיים.

(6) נתונה המשוואה הבאה:  $m^2x(9x+1)+1=0$ .

א. מצא עבור אלו ערכי  $m$  יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה- $m$  המתאימים במידה והוא קיים.

(7) נתונה המשוואה:  $mx^2 - (9m+4)x + 20m+16 = 0$ .

- א. הראה שעבור כל ערך של  $m$  יש למשוואה לפחות פתרון ממשי אחד.  
 ב. פתור את משוואה והראה כי אחד השורשים הוא מספר קבוע שאינו תלוי ב- $m$ .

(8) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = (m^2 - m - 2)x^2 + 2(m-2)x + 4$ .

ענה על השאלות הבאות:

- א. עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות שונות?  
 ב. עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודת אחת בלבד?  
 ג. עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה לא חותך את ציר ה- $x$  כלל?  
 ד. עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה חיובי לכל ערך של  $x$ ?  
 ה. עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה שלילי לכל ערך של  $x$ ?

(9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = kx^2 - 5kx + 6k + 1$ .

- א. עבור אלו ערכי  $k$  גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה- $x$ ?  
 ב. עבור איזה ערך של  $k$  יתקבל גרף פרבולה הנוגעת בציר ה- $x$ ?

(10) עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה:  $f(x) = (k^2 - 5k - 6)x^2 + (2 - 3k)x + 2$

הוא אי-שלילי לכל ערך של  $x$ ?

(11) נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 + 4x + 2m + 2$  ו-  $g(x) = (1-m)x^2 - 3mx - 1.5$ .

- א. מצא עבור אלו ערכי  $m$  נחתכים הגרפים של הפונקציות:  
 i. בשתי נקודות שונות.  
 ii. בנקודה אחת בלבד.  
 iii. באף נקודה.  
 ב. מצא לאלו ערכי  $m$  יהיה גרף הפונקציה  $f(x)$  כולו מתחת לגרף הפונקציה  $g(x)$ .

**(12)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2kx^2 + 6kx + 8k + 2$ .

א. עבור איזה ערך של  $k$  גרף הפונקציה יהיה ישר העובר ברביעים הראשון והשני בלבד?

מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = kx^2 - 6x - 10$ .

ב. האם קיימים ערכי  $k$  עבורם גרף הפונקציה  $f(x)$  הוא מעל גרף

הפונקציה  $g(x)$  לכל  $x$ ? הראה חישוב מתאים.

ג. הוכח כי קיים ערך של  $k$  עבורו גרפים של שתי הפונקציות משיקים זה לזה ומצא אותו.

**(13)** נתונה הפונקציה הריבועית:  $f(x) = 2x^2 - (5m+7)x + 3m^2 + 8m + 5$ .

א. הראה כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  לפחות פעם אחת לכל ערך של  $m$ .

ב. מצא את שורשי הפונקציה.

ג. עבור אלו ערכי  $m$  סכום השורשים גדול מ-3.5.

ד. מהם שורשי הפונקציה כאשר:  $m = 0$ ?

**(14)** נתונה המשוואה הבאה:  $(k+1)x^2 + (k^2 - 4k - 5)x - 54 = 0$ .

א. ענה על שני החלקים הבאים:

i. עבור אלו ערכי  $k$  יהיו פתרונות המשוואה שני מספרים נגדיים?

ii. מהם פתרונות המשוואה עבור ערכי ה- $k$  שמצאת?

ב. הראה כי לא קיים ערך של  $k$  עבורו פתרונות המשוואה:

$$(k-4)x^2 + (6k-k^2-8)x + 5k-10 = 0 \text{ הם מספרים נגדיים.}$$

**(15)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = mx^2 + (m-2)x + m^2 + 3m - 10$ .

א. מצא עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ב. מצא את נקודות החיתוך שבין הגרפים המתקבלים עבור כל ערכי ה- $m$  שמצאת בסעיף א'.

**(16)** מצא עבור אלו ערכי  $m$  למשוואה:  $(4-m)x^2 + (m+2)x + m^2 - 12m - 28 = 0$

יהיו שני פתרונות ממשיים שונים שאחד מהם הוא אפס.

17 נתונה משפחת הפרבולות הבאה:  $f(x) = 2x^2 + (m+1)x + m^2 + 2m - 2.5$ .



- א. מצא ערך של  $m$  עבורו גרף הפרבולה השייכת למשפחת הפונקציות הנ"ל היא מהצורה:
- ב. עבור ערך ה- $m$  שמצאת בסעיף הקודם מצא את התחום של  $k$  עבורו יהיה לגרף הפרבולה ולישר  $y = kx - 4$  שתי נקודות חיתוך.

18 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = (m^2 - 5m + 4)x^2 + (2m - 2)x + 1$ .



- א. עבור אלו ערכים של  $m$  הפונקציה תחתוך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות שונות?
- ב. מצא ערך של  $m$  עבורו גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה שבצד, וכתוב את משוואת הישר המתקבלת במקרה זה.
- ג. הגרף שאת משוואתו מצאת בסעיף הקודם חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בשתי נקודות שונות. הראה כי אחת מהן אינה תלויה ב- $m$ .
- ד. עבור אלו ערכי  $m$  נקודת החיתוך שתלויה ב- $m$  תהיה מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם?

19 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4x(mx+2)+4-m}{4}$ ,  $m$  פרמטר חיובי.



- א. הראה כי לכל הגרפים המייצגים את משפחת הפונקציות הנ"ל יש נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$  שאינה תלויה ב- $m$  ומצא את נקודה זו.
- ב. עבור איזה ערך של  $m$  גרף הפונקציה יהיה מיוצג ע"י ישר מהצורה:
- ג. הראה כי קיים תחום של  $x$  אשר לא תלוי ב- $m$  ובו גרף הפונקציה נמצא תמיד מתחת לישר שמצאת בסעיף הקודם ומצא את תחום זה.

20 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3m^2x^2 + 4mx + 2$ .

- א. הוכח כי הפונקציה נמצאת תמיד מעל לציר ה- $x$  עבור כל ערך של  $m$ .
- ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא:  $y = \frac{mx^2 + 2x(m+2) + m}{3m^2x^2 + 4mx + 2}$ . מצא עבור אלו ערכי  $m$  הפונקציה  $y$  היא שלילית.



**(21)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = mx^2 + (2m+1)x - \frac{1}{4}$ .

א. עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה:

ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא:  $y = \frac{(m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x - 1}{mx^2 + (2m + 1)x - \frac{1}{4}}$ .

הראה כי הפונקציה  $y$  חיובית בתחום שמצאת בסעיף הקודם.

ג. דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $y$  עם ציר ה- $y$  מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$ .

i. כתוב את משוואת ישר זה.

ii. מצא עבור אלו ערכים של  $m$  גרף הפונקציה חותך את הישר

בנקודה שבה:  $x = -9$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $m > 0$  או  $m < -3$  וגם  $m \neq 3$  ב.  $m = 0, -3$  ג.  $-3 < m < 0$
- (2)  $-8 < m \leq 0$
- (3)  $m > 3\frac{2}{5}$  או  $m < -3$
- (4)  $m > 0$
- (5) א. i.  $m > 3$  ii.  $m$  אף  $m$  iii.  $m < 3$
- ב. לא קיים מקרה בו יש למשוואה פתרון יחיד.
- (6) א. i.  $m > 6, m < -6$  ii.  $m = \pm 6$  iii.  $-6 < m < 6, m \neq 0$
- ב. בשני המקרים יתקבל:  $x = -\frac{1}{18}$
- (7) א. מתקבל:  $\Delta = (m+4)^2$  שתמיד אי-שלילי ובמקרה הלא-ריבועי מתקבלת משוואה עם פתרון אחד.
- ב.  $m_{1,2} = 4, \frac{5m+4}{m}$
- (8) א.  $-2 < m < 2, m \neq -1$  ב.  $m = -1, -2$  ג.  $m < -2, m \geq 2$
- ד.  $-2 < m < -1, m = 2$  ה.  $m$  אף  $m$
- ב.  $k = 4$
- (9) א.  $0 \leq k < 4$
- (10)  $-26 \leq k \leq -2$
- (11) א. i.  $m < -8, m > -2, m \neq 0$  ii.  $m = 0, -2, -8$  iii.  $-8 < m < -2$
- ב.  $-8 < m < -2$
- (12) א.  $k = 0$  ב. לא. אין פתרון לאי-שוויון:  $f(x) > g(x)$
- ג. עבור אי-השוויון של סעיף ב' מתקבל:  $\Delta = 4(k+3)^2$  ולכן כאשר  $k = -3$  הגרפים נוגעים זה בזה בנקודה אחת.
- (13) א. הוכחה. ב.  $x_{1,2} = m+1, 1.5m+2.5$
- ג.  $m > 0$  ד.  $x_{1,2} = 1, 2.5$
- (14) א. i.  $k = 5$  ii.  $x = \pm 3$  ב. הוכחה.
- (15) א.  $m = 2, -5$  ב.  $(0,0), (-1,2)$
- (16)  $m = 14$
- (17) א.  $m = 1$ . כאשר:  $m = -3$  נקבל גרף:  $y = 2x^2 - 2x + 0.5$  המשיק לציר  $x$  מימין לראשית ולכן נפסל. ב.  $k < -4, k > 8$
- (18) א.  $m > 1, m \neq 4$  ב.  $f(x) = 1, m = 1$  ג. הנקודה היא:  $(0,1)$
- ד.  $m \neq 1, m < 4$
- (19) א. הנקודה היא:  $(-0.5, 0)$  ב.  $m = 0$  ג.  $-0.5 < x < 0.5$

**(20)** א. מתקבל:  $\Delta = -8m^2$  ולכן לגרף הפרבולה אין חיתוכים כלל ומכיוון ש-A אי-שלילי הרי שמדובר בפרבולה מרחפת חיובית. במקרה הישר מתקבל ישר המקביל לציר ה-x שגם כן כולו חיובי.  
 ב. מאחר והמכנה תמיד חיובי (ממקודם) יש לדרוש תנאים שיקיימו מונה שלילי ( $\Delta < 0$ ,  $a < 0$ ) - עבור המונה נקבל:  $m < -1$ .

**(21)** א.  $-1 < m < -\frac{1}{4}$  ב. הוכחה. ג. i.  $y = 4$

ii.  $m = 5$ ,  $-1\frac{7}{9}$

## חקירות עם קדקוד פרבולה:

### סיכום כללי:

תהא הפונקציה הריבועית:  $y = ax^2 + bx + c$  כאשר  $a \neq 0$ . נגדיר:  $\Delta = b^2 - 4ac$ .  
התיאור הגרפי של הפונקציה הריבועית הוא פרבולה.

עבור  $a \neq 0$  נקבל כי קדקוד הפרבולה הוא:  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ .

• שאלות העוסקות בקדקוד חיובי/שלילי נדרוש:  $-\frac{\Delta}{4a} > 0$  או  $-\frac{\Delta}{4a} < 0$  בהתאמה.

• שאלות העוסקות בקדקוד הנמצא מימין/משמאל לציר ה- $y$  נדרוש  $-\frac{b}{2a} > 0$

או  $-\frac{b}{2a} < 0$  בהתאמה.

• שאלות העוסקות בקדקוד שנמצא מעל/מתחת לישר  $y = n$  או מימין/משמאל

לישר  $x = k$  נדרוש  $-\frac{\Delta}{4a} > n$  ו-  $-\frac{b}{2a} > k$  בהתאמה.

• שאלות העוסקות בקדקוד שבאחד הרביעים נדרוש  $-\frac{b}{2a} > 0$  ו-  $-\frac{\Delta}{4a} > 0$

לפי הרביע המבוקש.

### שאלות:

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (m+3)x^2 + (3m+14)x + 2m+7$ .

א. עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה- $x$  בשתי נקודות?

ב. הבע באמצעות  $m$  את שיעורי קדקוד הפרבולה של גרף הפונקציה הנתונה.

ג. עבור אלו ערכי  $m$  קדקוד הפרבולה יהיה וודאי מתחת לישר:  $y = -4$ ?

ד. עבור אלו ערכי  $m$  מתקיימים התנאים של סעיף א' ו-ג' יחד?

(2) נתונה הפרבולה הבאה:  $f(x) = x^2 - 3(m-2)x + 2m^2 - 8m + 7$ .

א. הוכח את הטענות הבאות:

- i. גרף הפרבולה חותך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות עבור כל ערך של  $m$ .
- ii. קדקודי כל הפרבולות המיוצגות ע"י תבנית הפונקציה הנתונה נמצאים מתחת לציר ה- $x$ .
- ב. עבור איזה ערך של  $m$  גרף הפרבולה יחתוך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות הנמצאות באותו מרחק מראשית הצירים?
- ג. עבור ערך ה- $m$  שמצאת בסעיף הקודם מצא את נקודות החיתוך על ציר ה- $x$ .
- ד. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבלת בעת הצבת ערך ה- $m$  הנ"ל נמצא על ציר ה- $y$ .

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (m^2 - 2m - 3)x^2 + 8x + 0.5$ .

- א. עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה הוא פרבולה?
- ב. עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה- $x$  בשתי נקודות?
- ג. הבע באמצעות  $m$  את שיעורי קדקוד הפרבולה.
- ד. הוכח כי קדקודי כל הפרבולות נמצאים על הישר:  $2y = 8x + 1$  עבור כל ערך של  $m$  עבורו מתקבלת פרבולה.

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (k^2 - 2k + 15)x^2 + kx + 12$ .

- א. הוכח כי עבור כל ערך של  $k$  גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה- $x$  כלל.
- ב. הוכח כי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית הנ"ל תמיד מעל לציר ה- $x$ .
- ג. עבור איזה ערך של  $k$  קדקוד הפרבולה יהיה על ציר ה- $y$ ?
- ד. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה במקרה זה.

(5) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = (k^2 - 9)x^2 + (k+3)x - 1$ .

- א. עבור אלו ערכי  $k$  גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- $x$ ?
- ב. הבע באמצעות  $k$  את שיעורי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית של  $f(x)$ .
- ג. מצא עבור אלו ערכי  $k$  קדקוד הפרבולה יהיה ברביע הראשון.
- ד. האם קיים ערך של  $k$  עבורו קדקוד הפרבולה נמצא על ציר ה- $y$ ? נמק את תשובתך.

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (m^2 - 4)x^2 + 5mx + 6$ .

- הראה כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  לפחות פעם אחת עבור כל ערך של  $m$ .
- עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה הוא פרבולת מינימום?
- הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבל עבור ערכי ה- $m$  שמצאת בסעיף הקודם נמצא תמיד מתחת לציר ה- $x$ .

(7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (m^2 - 8m + 12)x^2 + (m - 2)x + 2$ .

- עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה- $x$ ?
- עבור אלו ערכי  $m$  גרף הפונקציה הוא פרבולה מרחפת חיובית שקדקודה משמאל לישר:  $x = -\frac{1}{2}$ .
- האם ייתכן כי גרף הפונקציה יכול להיות פרבולת מקסימום שקדקודה הוא משמאל לישר:  $x = -\frac{1}{2}$ ? נמק והראה חישוב מתאים.

(8) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = (m^2 - 4)x^2 + 2x + 1$ ,  $g(x) = (m + 2)x^2 + (5 - m)x + 3$ .

- ענה על השאלות הבאות:
  - מצא ערך של  $m$  עבורו הגרפים משיקים זה לזה.
  - מצא ערך של  $m$  עבורו הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.
  - הסבר מדוע בכל מקרה התקבל ערך  $m$  שונה.
- עבור אלו ערכי  $m$  הגרפים של הפונקציות הם פרבולות מינימום המקיימות שקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י הפונקציה  $f(x)$  נמצא מימין לקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י  $g(x)$ ?

(9) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = (m^2 - 9)x^2 + 7x + 5$ ,  $g(x) = (m - 3)x^2 + (4m - 3)x + 1$ .

- עבור אלו ערכי  $m$  הגרפים נחתכים בשתי נקודות שונות?
  - ענה על השאלות הבאות:
    - עבור איזה ערך של  $m$  הגרפים הם פרבולות נוגעות זו בזו?
    - עבור איזה ערך של  $m$  הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.
    - הסבר את ההבדל בין הערכים של  $m$  שהתקבלו בחלק i ובחלק ii.
  - מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
- עבור אלו ערכי  $m$  הסכום של שיעורי ה- $x$  של נקודות קדקודי הפרבולות של שתי הפונקציות יהיה קטן מ-1?

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } m < -28, m > -4, m \neq -3. \quad \text{ב. } \left( \frac{-3m-14}{2m+6}, \frac{-m^2-32m-112}{4m+12} \right)$$

$$\text{ג. } m > -3. \quad \text{ד. } m > -3.$$

$$(2) \quad \text{א. i. מתקבל: } \Delta = m^2 - 4m + 8 \text{ שחיובי תמיד.}$$

$$\text{ii שיעור ה- } y \text{ של הקדקוד הוא: } -\frac{\Delta}{4} \text{ אשר שלילי תמיד.} \quad \text{ב. } m = 2$$

$$\text{ג. } (\pm 1, 0) \quad \text{ד. הקדקוד: } (0, -1).$$

$$(3) \quad \text{א. } m \neq 3, -1. \quad \text{ב. } -5 < m < 7. \quad \text{ג. } \left( \frac{-4}{m^2-2m-3}, \frac{m^2-2m-35}{2(m^2-2m-3)} \right)$$

ד. יש להציב את הקדקוד בישר ולקבל שוויון אמת.

$$(4) \quad \text{א. המקדם } a \text{ תמיד חיובי ומתקבל: } \Delta = -47k^2 + 96k - 720 \text{ שתמיד שלילי.}$$

$$\text{מכאן שמדובר בפרבולה מרחפת עבור כל } k. \quad \text{ג. } k = 0. \quad \text{ד. } (0, 12).$$

$$(5) \quad \text{א. } -3 \leq k < 1.8. \quad \text{ב. } \left( \frac{1}{2(3-k)}, \frac{9-5k}{4(k-3)} \right). \quad \text{ג. } 1.8 < k < 3.$$

ד. לא. מכיוון שלא קיים ערך של  $k$  עבורו שיעור ה- $x$  של קדקוד הפרבולה יהיה אפס.

$$(6) \quad \text{א. מתקבל: } \Delta = m^2 + 96 \text{ המעיד כי תמיד יש לפונקציה שני חיתוכים וכאשר } m = \pm 2$$

$$\text{מתקבלים שני ישרים החותכים את ציר ה- } x. \quad \text{ב. } m < -2, m > 2.$$

$$(7) \quad \text{א. } m \leq 2, m > 6\frac{4}{7}. \quad \text{ב. } 6\frac{4}{7} < m < 7. \quad \text{ג. לא.}$$

$$(8) \quad \text{א. i. } m = -1\frac{4}{9}. \quad \text{ii. } m = -2. \quad \text{iii. במקרה i מדובר בפרבולות אשר}$$

$$\text{יכולות להשיק ובמקרה ii מדובר בשני ישרים אשר רק נחתכים.} \quad \text{ב. } 3 < m < 4.$$

$$(9) \quad \text{א. } m \neq 3, -2, m < 3\frac{1}{16}. \quad \text{ב. i. } m = 3\frac{1}{16}. \quad \text{ii. } m = 3, -2.$$

iii. במקרה i מדובר במשוואה ריבועית ובנקודת השקה, ובמקרה ii מדובר במשוואה ליניארית ובנקודת חיתוך.

$$\text{ג. עבור } m = -2 \text{ מתקבלת: } \left( -\frac{2}{9}, 3\frac{16}{81} \right), \text{ עבור } m = 3 \text{ מתקבלת: } (2, 19).$$

$$\text{ד. } m < -3, -2.72 < m < 1.22, m > 3.$$